Spiru C. Haret

Operele lui Spiru C. Haret

Ediție îngrijită și note de Constantin Schifirneț

Volumul X
Operele științifice

1878–1912

comunicare.ro

Redactor: Lucian Pricop
Coperta: Cristian Lupeanu
Tehnoredactor: Olga Machin

SNSPA, Facultatea de Comunicare și Relații Publice
Strada Povernei 6, București
Tel./fax: 021 313 58 95
E-mail: editura@comunicare.ro
www.comunicare.ro
www.editura.comunicare.ro

Editat cu sprijinul Autorității Naționale pentru Cercetare Științifică.
Tiraj: 1000 de exemplare.
Preț de vânzare al unui exemplar (mai puțin adaosul comercial): 107 lei (vol. VII–XII).

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
HARET C., SPIRU
Operele lui Spiru C. Haret / Haret C. Spiru; pref.: Remus Pricopie, Constantin Schifirneț. Ed. a 2-a, rev. – București: Comunicare.ro, 2010
11 vol.
ISBN 978-973-711-206-4
Vol. X: Operele științifice: 1878–1912. – Bibliogr.
ISBN 978-973-711-217-0

I. Pricopie, Remus (pref.)
II. Schifirneț, Constantin (pref.)

821.135.1-821
821.135.1

CUPRINS

SUR L'INVARIABILITÉ DES GRANDS AXES DES ORBITES PLANÉTAIRES

(TEZE DE DOCTORAT 1878)

1. Il y a peu de problèmes qui aient exercé la sagacité des géomètres les plus éminents pendant aussi longtemps que celui *des n corps*. L'importance pratique, ainsi que l'intérêt purement scientifique et philosophique qui s'attache à la loi de la gravitation universelle, explique la ténacité avec laquelle les savants, depuis Newton, ont poursuivi l'étude de ce problème.

Malheureusement les équations différentielles des mouvements des corps célestes sont loin d'être complètement intégrées ; et, pour aborder la résolution numérique du problème, on est obligé de recourir à des méthodes d'approximation d'un emploi très laborieux ; mais les propriétés auxquelles on arrive ainsi n'ont nécessairement qu'un degré d'exactitude relatif.

Cependant, parmi ces propriétés, il y en a une qui mérite une atenttion particulière, à cause des conséquences qu'on en peut tirer à l'égard de la stabilité du système du monde ; elle est connue sous le nom d'*invariabilité des grands axes des orbites planétaires*. Voici en quoi elle consiste :

2. On sait que, à cause de la petitesse des masses des planètes par rapport à celle du Soleil, l'orbite que chacune d'elles décrit autour du Soleil s'écarte très peu de la forme de l'ellipse qu'elle décrirait si toutes les masses perturbatrices venaient à disparaître. Cela étant, il était naturel que les géomètres prissent le mouvement elliptique comme point de départ dans les calculs d'approximation qu'ils devaient faire pour arriver à la connaissance du mouvement réel. Tel est le principe de la *méthode de la variation des constantes arbitraires* de Lagrange. Dans cette méthode, on considère les *éléments elliptiques* de la planète comme variant sans cesse à cause des perturbations produites par

les autres planètes, et l'on a trouvé des formules d'une simplicité remarquable qui expriment les variations des éléments elliptiques. Pour intégrer ces formules, il est nécessaire de développer ce que l'on appelle la *fonction perturbatrice* R en une série convergente de sinus ou de cosinus d'arcs proportionnels au temps, ce que l'on peut toujours faire, vu que dans la nature R est toujours fini et continu, et que les orbites des diverses planètes sont toujours peu excentriques et peu inclinées les unes sur les autres. Cela fait, on considère, dans une première approximation, les éléments comme constants, et de simples quadratures donnent alors les *inégalités* que chaque terme du développement de R introduit dans la valeur des éléments elliptiques. Dans la seconde approximation, on substitue les valeurs trouvées pour chaque élément par la première approximation dans les formules qui donnent les variations de ces éléments, et par de nouvelles quadratures on trouve de nouvelles inégalités ; et ainsi de suite.

On peut facilement se faire une idée du degré d'approximation que l'on réalise par ces diverses opérations. La fonction R est linéaire par rapport aux masses des planètes perturbatrices. En supprimant R, on suppose par cela même que ces masses sont nulles ; on a alors les intégrales du mouvement elliptique. Dans la première approximation, l'intégration des équations qui donnent la variation des éléments elliptiques introduit dans les valeurs de ces éléments des termes du premier ordre par rapport aux masses perturbatrices. Ces valeurs étant substituées dans les mêmes équations, on aura, en intégrant, des termes du second ordre par rapport à ces masses ; et ainsi de suite. Ainsi l'ordre des inégalités successivement introduites est égal au nombre des approximations successives que l'on a effectuées pour y arriver.

3. On doit distinguer deux espèces d'inégalités : 1° celles provenant des termes de R qui contiennent le temps explicitement, et qui par l'intégration donnent toujours des termes périodiques à courte période ; ces inégalités sont peu importantes, parce que dans une longue suite de siècles elles se compensent et ne peuvent pas apporter des changements considérables dans le système du monde ; 2° celles qui sont produites par les termes de R qui ne contiennent pas le temps explicitement ; celles-ci

augmentent lentement, mais continuellement, pendant très longtemps et toujours dans le même sens, et peuvent introduire avec le temps des modifications très sensibles dans la constitution de l'Univers : on les appelle des *inégalités séculaires*.

Or il est très remarquable que les grands axes des orbites planétaires ne sont pas affectés d'inégalités séculaires, du moins quand on tient compte seulement des deux premières puissances des masses ; c'est en cela que consiste l'*invariabilité des grands axes des orbites*.

4. Ce n'est que peu à peu et avec beaucoup de difficultés que cette belle propriété a été établie. Laplace est le premier qui l'énonça [1]) ; mais il ne tenait compte que des premières puissances des masses et des quantités du premier et du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Lagrange démontra ensuite [2]) qu'elle était vraie même quand on tenait compte de toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons ; mais il ne dépassa pas la première puissance des masses. Dans un Mémoire lu à l'Institut le 20 juin 1808 ([3]), Poisson réussit à l'étendre aux secondes puissances des masses ; mais son calcul est extrêmement long et pénible. Plus tard on réussit à le simplifier beaucoup en faisant usage de la méthode de la variation des constantes arbitraires, découverte par Lagrange ; c'est cette méthode que M. Liouville (19) a suivie dans ses leçons au Collège de France en 1841, et que M. V. Puiseux a reproduite avec quelques modifications dans la Thèse pour le Doctorat qu'il a présentée à la même époque à la Faculté des Sciences de Paris.

Dans le Mémoire de Poisson, ainsi que dans la Thèse de M. Puiseux, on doit distinguer deux parties : dans la première, on considère seulement les variations des éléments de la planète troublée, et l'on prouve qu'elles ne produisent pas, dans le grand axe, des inégalités séculaires du second ordre par rapport aux masses ; cette partie de la démonstration est assez simple et facile à suivre. Dans la seconde, on tient compte des variations des éléments des planètes perturbatrices ; le calcul diffère entièrement du précédent, par la raison que la fonction perturba-

---

1. Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1773.

2. *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1776.

3. Ce Mémoire a été publié dans le XV-e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, année 1809, p. 1—56.

trice varie d'une planète à l'autre ; c'est pourquoi on a été obligé de recourir à l'équation des forces vives et de faire des combinaisons très ingénieuses, mais indirectes et assez laborieuses, pour prouver qu'il n'existe pas dans le grand axe de l'orbite de la planète troublée d'inégalités séculaires du second ordre provenant de cette espèce de variations.

5. Lagrange a eu l'idée, en 1808 [1]), de considérer le mouvement des corps célestes autour de leur centre de gravité commun ; dans ce cas, la fonction perturbatrice est la même pour toutes les planètes ; mais son calcul est entaché de plusieurs fautes de signe, ce qui en détruit toute la valeur.

M. Tisserand, dans une Note insérée aux *Comptes rendus* ([2]), a indiqué un autre moyen pour arriver au même résultat : il fait usage d'un changement de coordonnées employé par Jacobi dans son célèbre Mémoire *Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps*. Il arrive ainsi à faire en sorte que les diverses fonctions perturbatrices ne diffèrent que par un facteur constant, ce qui permet de ramener la seconde partie de l'analyse de Poisson à la première.

Je me propose, dans ce travail, d'exposer la méthode de M. Tisserand. De plus, je reprends une ancienne démonstration de Poisson ([3]), par laquelle l'illustre géomètre croyait être parvenu à prouver que le grand axe n'éprouve pas d'inégalités séculaires du troisième ordre par rapport aux masses, quand on tient compte seulement des variations des éléments de la planète troublée ; il avait reculé devant la tâche d'aborder la seconde partie de la question, à cause de la complication excessive qu'auraient eue les calculs s'il avait appliqué la même méthode qui lui avait servi pour les carrés des masses. Mais la démonstration de Poisson n'est pas complète encore à un autre point de vue : c'est qu'il ne tient pas compte d'une classe de termes d'une forme particulière, qui s'introduisent dans l'expression du demi-grand axe, dès la seconde puissance des masses. En comblant cette lacune, je fais voir quedes termes séculaires apparaissent

1. *Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, t. IX, année 1808.—*Oeuvres complètes*, édition de M. J.-A. Serret, t. VI.

2. T. LXXXII, numéro du 21 février 1876.

3. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. I. P. 55—67, année 1816.

dans la valeur du demi-grand axe, dès la troisième puissance des masses, ce qui est diamétralement opposé à la conclusion du Mémoire de Poisson. Dans la suite de ce Mémoire, je montre, d'après la mèthode de Poisson, que les termes séculaires ainsi introduits ne peuvent pas disparaître avec d'autres, puisque tous les autres termes séculaires de l'ordre du cube des masses s'entre-détruisent; je complète cette partie de la démonstration de Poisson en tenant compte aussi des variations des éléments des planètes perturbatrices, ce qui n'est pas difficile si l'on fait usage de la transformation de M. Tisserand.

Ainsi cette propriété de l'invariabilité des grands axes, que beaucoup de géomètres, et Poisson lui-même, croyaient être tout à fait générale, a ce point qu'on avait même essayé de le prouver directement [1]), n'existe pas même pour la troisième puissance des masses; ce qui est un résultat assez important, tant au point de vue analytique qu'à celui de la pratique de l'Astronomie mathématique

I.

6. On sait que, dans le problème de $n+1$ corps, les équations différentielles du mouvement absolu des différents mobiles sont de la forme

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{m_i m_j (x_j - x_i)}{\delta_{ij}^3} + \frac{m_i m_k (x_k - x_i)}{\delta_{ik}^3} + \dots,$$

$$m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{m_i m_j (y_j - y_i)}{\delta_{ij}^3} + \frac{m_i m_k (y_k - y_i)}{\delta_{ik}^3} + \dots,$$

$$m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{m_i m_j (z_j - z_i)}{\delta_{ij}^3} + \frac{m_i m_k (z_k - z_i)}{\delta_{ik}^3} + \dots,$$

$$m_j \frac{d^2x_j}{dt^2} = \frac{m_j m_i (x_i - x_j)}{\delta_{ij}^3} + \frac{m_j m_k (x_k - x_j)}{\delta_{jk}^3} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

où

$$\delta_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2, \quad \dots.$$

1. *Voir* un *Mémoire* de M. Maurice et plusieurs Notes sur ce Mémoire dans le tome XV des *Comptes rendus*.